数学奥林匹克问题

本期问题

初 317 在$\triangle ABC$中，记$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c，AD为$\angle A$的角平分线，与BC交于点D，且$AD=BC$. 证明：

$$2\leqslant\frac{b}{c}+\frac{c}{b}<2\sqrt{2}.$$

初 318 如图 1，点D、E分别是等边$\triangle ABC$的边AB、AC上的点，满足$BD=AE$，联结CD、BE交于点O. 已知$BO=2$，$CO=5$. 求AO的长.

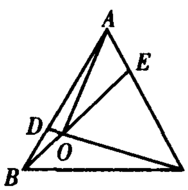

图 1

高 317 已知h_a、h_b、h_c和m_a、m_b、m_c分别为$\triangle ABC$三边a、b、c的高线长和中线长. 证明：

$$\frac{m_a}{h_b+h_c}\cdot\frac{m_b}{h_c+h_a}\cdot\frac{m_c}{h_a+h_b}\leqslant\frac{1}{8}.$$

高 318 已知$x_i(i=1,2,\cdots,n)\in\mathbf{R}_+$，且$\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=1$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+\frac{2n+1}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\geqslant\frac{(n+1)^2}{n}.$$

上期问题解答

初 315 已知方程

$$a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2a^2c+ab)x^2+(2abc+b^2)x+ac^2+bc+c=0(a>0)$$

有实根. 证明：

$$(\sqrt{b^2-4ac}+1)^2\geqslant 2b+1.$$

证明 原方程可化为

$$a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=0.$$

令$f(x)=ax^2+bx+c$. 则原方程可化为

$$f(f(x))=0. \qquad ①$$

设$f(x)=0$的实根为x_1、$x_2(x_1\leqslant x_2)$. 则

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由题设知$f(x)=x_1$，$f(x)=x_2$中至少有一个有实根.

又对$p\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$，$f(x)=p$都有实根，故

$$x_2\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a},$$

即
$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow -2b+2\sqrt{b^2-4ac}\geqslant 4ac-b^2$$

$$\Rightarrow(\sqrt{b^2-4ac}+1)^2\geqslant 2b+1.$$

（陆一平　上海市市北初级中学，200071）

初 316 如图 2，点P、Q均在$\square ABCD$的外部，满足

$$\angle ABP=\angle ADQ=\angle PCQ=90^\circ.$$

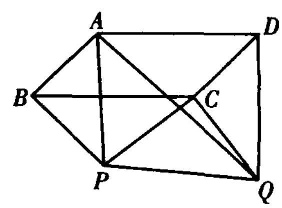

图 2

证明：$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle DCQ}$.

证明 设$\angle ABC=\angle ADC=\alpha$，$\angle BCD=\angle BAD=\beta$.

显然，$\alpha+\beta=180^\circ$.

又设$\angle PBC=\gamma$.

由$\alpha+\gamma=\angle ABP=90^\circ$，知

$$\angle CDQ=\angle ADQ-\angle ADC=90^\circ-\alpha=\gamma.$$

而
$$\begin{aligned}\angle PCB&=360^\circ-\angle PCQ-\beta-\angle DCQ\\&=270^\circ-(180^\circ-\alpha)-\angle DCQ\\&=90^\circ+\alpha-\angle DCQ\\&=180^\circ-(\gamma+\angle DCQ)\\&=\angle CQD.\end{aligned}$$

则$\triangle BPC \backsim \triangle DCQ$

$\Rightarrow \frac{BP}{BC}=\frac{DC}{DQ} \Rightarrow \frac{BP}{DA}=\frac{BA}{DQ}$.

注意到,$\angle ABP=90^{\circ}=\angle QDA$.

故$\triangle ABP \backsim \triangle QDA$

$\Rightarrow \angle APB=\angle QAD$.

于是,$\frac{AP}{AQ}=\frac{BP}{DA}=\frac{BP}{BC}$.

又$\angle PAQ=\beta-\angle BAP-\angle QAD$

$=(180^{\circ}-\alpha)-(\angle BAP+\angle APB)$

$=(180^{\circ}-\alpha)-(180^{\circ}-\alpha-\gamma)$

$=\gamma=\angle PBC$.

则$\triangle APQ \backsim \triangle BPC \backsim \triangle DCQ$.

因$\frac{S_{\triangle BPC}+S_{\triangle DCQ}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{PC^2+CQ^2}{PQ^2}=1$,所以,

$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle DCQ}$.

(黄全福　安徽省怀宁县江镇中学,246003)

高 315　求

$$S=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[2\,011]{2\,011}}}}$$

的整数部分.

解　令$n=2\,011$,设

$a_1=\sqrt[n]{n}$,

$a_k=\sqrt[n-k+1]{n-k+1+a_{k-1}}\ (2 \leqslant k \leqslant n-1)$.

则$S=a_{n-1}$.

下面用归纳法证明:

$1<a_m<2\ (m=1,2,\cdots,n-1)$.

(1)当$m=1$时,由于$1<n<2^n$,故

$1<\sqrt[n]{n}<2$.

(2)假设当$m=k(1 \leqslant k \leqslant n-2)$时,结论成立,则当$m=k+1$时,由于

$1<n-k+1<n-k+a_k<n-k+2$

$\leqslant(1+1)^{n-k}=1+(n-k)+\cdots+1$,

故$1<a_{k+1}=\sqrt[n-k]{n-k+a_k}<2$.

因此,当$m=k+1$时,结论成立.

综上,$1<a_m<2\ (m=1,2,\cdots,n-1)$.

从而,S的整数部分是 1.

(张　雷　辽宁省沈阳市东北育才中学,110179)

高 316　已知函数$f:\mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{N}_+$是单调增函数.若$f(f(n))=3n$,求$f(2\,011)$.

解　令$f(1)=m$.则$f(m)=f(f(1))=3$.

故$m>1 \Rightarrow f(m)>f(1) \Rightarrow 3>m$.

因此,$f(1)=m=2 \Rightarrow f(2)=f(f(1))=3$.

类似得$f(3)=6, f(6)=9$.

由$f(3)<f(4)<f(5)<f(6)$,得

$6<f(4)<f(5)<9$.

故$f(4)=7, f(5)=8$.

进而,$f(7)=f(f(4))=12$,

$f(8)=f(f(5))=15$,

$f(9)=f(f(6))=18$,

$f(12)=f(f(7))=21$,

$f(10)=19, f(11)=20$.

下面用数学归纳法证明:

$$f(n)=\begin{cases}n+3^m, & 3^m \leqslant n<2 \times 3^m; \\ 3n-3^{m+1}, & 2 \times 3^m \leqslant n<3^{m+1}\end{cases}\ (m \in \mathbf{N}_+).$$

当$m=0,1$时,已验证结论成立.

假设当$m=k-1$时,结论也成立.

当$2 \times 3^{k-1} \leqslant n<3^k$时,

$f(n)=3n-3^k \Rightarrow f(3n-3^k)=3n$.

令$3n-3^k=p \in[3^k, 2 \times 3^k)$.则

$f(p)=p+3^k$.

再由f的单调性得,当$3^k \leqslant n<2 \times 3^k$时,总有$f(n)=n+3^k$.

则$f(n+3^k)=f(f(n))=3n$.

令$n+3^k=q \in[2 \times 3^k, 3^{k+1})$.则

$f(q)=3q-3^{k+1}$.

故当$n=k$时,结论也成立.

由数学归纳法知,当$n \in \mathbf{N}_+$时,结论成立.

因为$2 \times 3^6<2\,011<3^7$,所以,

$f(2\,011)=3 \times 2\,011-3^7=3\,846$.

(徐　道　江苏省如皋市教师进修学校,226500)